

1. : Convertir en langage formalisé ; donner la négation, en français et en langage formalisé ; puis démontrer ou infirmer l'énoncé (sauf (a) et (d)) ; on pourra noter \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers.
- (a) Tout entier naturel est somme de 4 carrés.
 - (b) Tout nombre premier ≥ 3 est du type $4n - 1$ ou $4n + 1$.
 - (c) Tout entier naturel du type $4n - 1$ est premier.
 - (d) a est un multiple de b (a et b sont deux entiers donnés).
 - (e) Tout multiple de 4 et 6 est multiple de 24.
 - (f) Tout nombre complexe possède au moins une racine $n^{\text{ième}}$, quel que soit l'entier $n > 0$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique ; écrire en langage formalisé :

a. u_n est toujours nul	a'. u_n est toujours non nul
b. u_n est nul à partir d'un certain rang	b'. u_n est non nul à partir d'un certain rang
c. u_n est nul une infinité de fois	c'. u_n est non nul une infinité de fois
d. u_n est nul au moins une fois	d'. u_n est non nul au moins une fois

Négations de ces énoncés ? Y-a-t-il des implications entre eux ?

3. :
- (a) Démontrer que l'opposé et l'inverse d'un irrationnel sont des irrationnels
 - (b) Démontrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
 - (c) Que dire :
 - i. du produit d'un rationnel non nul par un irrationnel ?
 - ii. de la somme de deux irrationnels positifs ?
4. : $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ?
5. : $\log 2$ est-il rationnel ($\log 2$ est défini par $10^{\log 2} = 2$) ?
6. *: Soient n et m deux entiers naturels.
- (a) Montrer que si n n'est pas un carré, \sqrt{n} est irrationnel.
 - (b) Montrer que si $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ est rationnel, alors $\sqrt{n} - \sqrt{m}$ également.
 - (c) En déduire que si l'un au moins parmi n et m n'est pas un carré, alors $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ est irrationnel.
7. : Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits colinéaires ssi
- $$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad / \quad \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$$
- Soit l'énoncé : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = \lambda \vec{v}$. Montrer qu'il ne s'agit pas d'une condition nécessaire et suffisante de colinéarité et le modifier pour qu'il en soit une.
8. : Déterminer et dessiner l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) dans le plan, défini par :
- (a) $xy(|x| + |y| - 1) = 0$
 - (b) $(x^2 - y^2)(|x| - |y| - 1) = 0$
 - (c) $|x| + |y| \neq 1 \Rightarrow xy = 0$.
9. : Démontrer que si n nombres réels ($n \geq 2$) ont une somme non nulle, alors pour tout entier p tel que $2 \leq p \leq n$, il existe p de ces nombres dont la somme est non nulle.
10. *: Si P est un énoncé, on pose $V(P) = 1$ si P est vraie, et $V(P) = 0$ si P est fausse.
- (a) Déterminer en fonction de $p = V(P)$ et de $q = V(Q)$: $V(\text{non } P)$ et $V(P \text{ et } Q)$.
 - (b) En déduire par le calcul : $V(P \text{ ou } Q)$ (ou inclusif), $V(P \Rightarrow Q)$, $V(P \Leftrightarrow Q)$, $V(\text{soit } P \text{ soit } Q)$ (ou exclusif) sous la forme la plus simple. Que remarque-t-on pour les deux derniers ?

11. * : On dit qu'un point M du plan "se projette" sur un segment $[AB]$ s'il existe un point H du segment $[AB]$ avec $[MH]$ perpendiculaire à $[AB]$.

On considère un polygone convexe. Les énoncé suivants sont-ils vrais ou faux ?

- (a) Tout point intérieur au polygone se projette sur un côté au moins.
- (b) Il y a au moins un point intérieur au polygone qui se projette sur tous les côtés.
- (c) Tout point de tout côté du polygone est le projeté d'au moins un point intérieur au polygone.